

Model Distribusi Potensial Elektrokinetik dalam Medium Pori dengan Metode Elemen Batas

Jeffry Kusuma¹ dan Muhammad Hamzah²

Abstrak

Model distribusi potensial elektrokinetik (PE) dalam medium berpori dilakukan menggunakan metoda elemen batas (MEB). Potensial elektrokinetik atau *streaming potential* merupakan potensial yang dibangkitkan oleh kecepatan aliran air dalam medium berpori. Model distribusi potensial elektrokinetik dibangun dengan menggunakan persamaan differensial Laplace sebagai persamaan umum aliran air dalam tanah. Bentuk distribusi potensial elektrokinetik dalam medium pori yang dilalui air dalam dua dimensi baik secara vertikal maupun lateral dikaji dengan menggunakan metode elemen batas. Hasil pemodelan menunjukkan bahwa MEB sangat baik digunakan untuk memetakan distribusi potensial elektrokinetik dalam medium berpori.

Kata Kunci: Potensial elektrokinetik, metode elemen batas, medium berpori.

Abstract

Electro kinetic potential distribution model in porous medium is studied by using the boundary element method (BEM). The model of electro kinetic potential or streaming potential is generally known by a potential generated by fluid flow in porous medium. This distribution model of electro kinetic potential is constructed using the Laplace's as equation of seepage water. The model is doing to provide a better understand the distribution electro kinetic potential in two dimensional porous medium not only for vertically but also for laterally. The results show a good approach of the boundary element method to model distribution electro kinetic potential in porous medium.

Keywords: Electro kinetic potential, boundary element method, porous medium.

1. Pendahuluan

Salah satu sumber potensial alami (*natural potential*) atau *self-potential* (SP) adalah potensial elektrokinetik yang biasa juga disebut *streaming potential*. Mekanisme yang terjadi sehingga muncul potensial elektrokinetik berkaitan dengan perembesan air dalam medium berpori. Oleh karena itu, potensial elektrokinetik dapat digunakan untuk eksplorasi perembesan air tanah (*groundwater*).

Eksplorasi air tanah dengan potensial elektrokinetik adalah merupakan teknik yang baru dalam geofisika [2]. Ada beberapa penelitian yang telah dilakukan tentang potensial elektrokinetik yang muncul karena aliran fluida dalam medium berpori, di antaranya adalah aplikasi SP dalam "*geotechnical engineering*" untuk studi perembesan air tanah [5]. Studi SP untuk mengidentifikasi karakteristik aliran fluida [6]. Studi SP pengukuran laboratorium potensial elektrokinetik dari aliran fluida melalui medium berpori [8].

Tulisan ini membahas penerapan metoda elemen batas (MEB) untuk memodelkan distribusi potensial elektrokinetik dalam medium berpori. Distribusi potensial elektrokinetik

¹ Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin, email: jeffry.kusuma@gmail.com

² Jurusan Fisika FMIPA Universitas Hasanuddin, email: hamzah@fmipa.unhas.ac.id

didasarkan pada distribusi kecepatan perembesan air dalam medium pori. Dengan demikian, jika diketahui distribusi kecepatan perembesan air dalam medium maka distribusi potensial elektrokinetik juga dapat diketahui.

Metoda elemen batas (MEB) adalah salah satu metoda yang banyak digunakan dalam perhitungan numerik. MEB merupakan teknik perhitungan numerik yang cukup ampuh untuk menyelesaikan persoalan-persoalan di bidang sains dan rekayasa. Perhitungan numerik yang dilakukan dalam MEB adalah menyelesaikan persamaan integral yang merupakan persamaan hasil transformasi persamaan differensial. Sebagai contoh, persamaan differensial Laplace ditransformasikan ke persamaan integral kemudian diselesaikan dengan pendekatan MEB.

Diskritisasi metoda elemen batas dilakukan pada permukaan, artinya dari semua batasan medium yang ditinjau dapat diketahui nilai-nilai variabel yang dibutuhkan sehingga dapat dihitung nilai-nilai yang berada dalam batasan. Oleh karena itu, diskritisasi hanya dilakukan pada batasan dan merupakan ciri atau karakteristik khusus dari MEB yang membedakan dengan metoda yang lain seperti FEM dan FDM.

2. Tinjauan Pustaka

Self Potensial (SP) yang dibangkitkan oleh aliran air dalam medium berpori yang dikenal dengan potensial elektrokinetik. Persamaan potensial elektrokinetik telah dikemukakan oleh Helmholtz-Smoluchowski dalam [9] adalah

$$\Delta V = \frac{\zeta \varepsilon}{\eta \sigma_w} \Delta P \quad (1)$$

dimana

ζ = potential antara layer + and – (yaitu *solid and liquid phases*)

ε = konstanta dielektrik dari fluida

η = kekentalan (viscosity) dari fluida ($\text{ML}^{-1}\text{T}^{-1}$)

σ_w = konduktivitas (conductivity) dari fluida
($\text{I}^2\text{T}^3\text{M}^{-1}\text{L}^{-2}$)

ΔP = perbedaan tekanan ($\text{ML}^{-1}\text{T}^{-2}$)

ΔV = potential elektrokinetik (mV).

Persamaan (1) terutama telah digunakan dalam *hydrogeophysics*. Aspek-aspek secara fisik potensial elektrokinetik belum sepenuhnya dipahami. Oleh karena itu, kuantifikasi persamaan tersebut masih diperlukan untuk pengembangan geoteknik. Dalam geoteknik, potensial diri adalah digunakan dalam investigasi air tanah “*groundwater*” dan aplikasinya secara “*geotechnical engineering*” untuk studi perembesan air tanah.

Bila koefisien streaming potensial “*coupling coefficient*” adalah c “didefinisikan sebagai perbandingan antara PE (ΔV) dengan perbedaan gradient tekanan (ΔP) maka koefisien PE dapat ditulis kembali sebagai berikut,

$$c = \frac{\zeta \varepsilon}{\eta \sigma_w} \quad (2)$$

dimana c adalah koefisien potensial elektrokinetik. Air akan mengalir jika terdapat perbedaan tinggi muka air “*hydraulic head*”. Menurut hukum Darcy kecepatan aliran air dalam medium

sebanding dengan gradient hidrolik. Gradien selisih ketinggian air dibandingkan dengan jarak antara dua titik disebut gradient hidrolik ∇H . Karena itu, $P = \rho g H$, dimana ρ adalah densitas dari fluida (kg/m^3), g konstanta gravitasi (9.81 m/s^2) dan H adalah ketinggian fluida air atau *hydraulic head*, persamaan (1) dapat ditulis kembali sebagai berikut,

$$\nabla V = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 \zeta \rho g}{\eta \sigma_w} \nabla H = C \nabla H \quad (3)$$

dimana ζ adalah zeta-potensial, ε_r adalah konstanta dielektrik relative cairan, ε_0 adalah konstanta dielektrik dalam ruang vakum, η adalah viskositas fluida. Selanjutnya, besaran C yang baru ini, didefinisikan sebagai konstanta konduktivitas elektrohidrolik. Persamaan (3) dikenal pula dengan persamaan Helmholtz-Smoluchowski [4].

Aliran air tanah secara normal telah dapat digambarkan oleh hukum Darcy:

$$\frac{Q}{A} = -\frac{k}{\eta} \nabla P = -\frac{k \rho g}{\eta} \nabla H = -K \nabla H \quad (4)$$

dimana Q adalah debit aliran (volume/waktu), A adalah luas penampang, k adalah permeabilitas intrinsik, dan K adalah konduktivitas hidrolik. $Q/A = v$ adalah kecepatan Darcy dalam cm/s. Anomali self-potensial pada persamaan (3) dihubungkan dengan persamaan hukum Darcy dalam persamaan (4) akan diperoleh persamaan berikut,

$$v = K \nabla H = \frac{K}{C} \nabla V \quad (5)$$

dimana v adalah laju aliran fluida air (LT^{-1}), k permeabilitas intrinsik, (L^2), K konduktivitas hidrolik (cm/det), η viscosity dari fluida ($\text{ML}^{-1}\text{T}^{-1}$), C koefisien potensial elektrohidrolik (mV/cm), ∇V adalah gradient potensial elektrokinetik ($\text{MLI}^{-1}\text{T}^{-3}$).

Persamaan (5) menyatakan hubungan antara kecepatan aliran fluida dengan anomali potensial elektrokinetik dalam medium.

2. Metode Elemen Batas (MEB)

Persamaan differensial Laplace (PDL), merupakan salah satu persamaan yang penting dalam aliran atau perembesan air tanah. PDL tersebut tidak hanya berlaku untuk aliran air dalam tanah/batuan tetapi juga berlaku untuk formulasi interpretasi self-potensial (SP) yang dianalogikan sebagai elektrohidrolik "*electrohydraulic analogy*". Selain itu, PDL berlaku pada perpindahan energi panas dalam batuan dan aliran listrik dalam medium konduktor. PDL tersebut adalah:

$$\nabla^2 H = 0. \quad (6)$$

Perhitungan distribusi potensial elektrokinetik dan distribusi kecepatan perembesan fluida air di bawah tanah dalam penelitian ini menggunakan PDL. Dari tujuan tersebut, dilakukan transformasi PDL dua dimensi ke persamaan integral Laplace (PIL). Hasil transformasi PDL ke dalam PIL [1] adalah sebagai berikut:

$$\lambda H(z_o) = \int_{C_m} \left(H \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial H}{\partial n} \right) ds. \quad (7)$$

dimana U adalah potensial, G adalah fungsi Green, dengan $\lambda = 1/2$ untuk titik-titik z_o yang berada pada batasan dan $\lambda = 1$ untuk z_o yang berada dalam domain yang ditinjau (nilai pertengahan Cauchy). Batasan C_m merupakan suatu kurva tertutup yang arahnya berlawanan arah jarum jam, sedangkan arah vektor normal (n) merupakan unit normal vektor yang mengarah keluar domain C_m . Solusi fundamental persamaan diferensial Laplace adalah sebuah fungsi Green. Fungsi Green tersebut adalah:

$$G(z, z_o) = \frac{1}{2\pi} \log |(z - z_o)| \quad (8)$$

dengan $z = x + iy$ dan $z_o = a + ib$.

Hasil transformasi PDL ke dalam PIL akan diselesaikan secara numerik dengan pendekatan metode elemen batas (MEB). Pendekatan MEB pada prinsipnya adalah solusi umum PDL secara numerik. Selanjutnya, penggunaan MEB dapat dihitung distribusi PE dan distribusi kecepatan perembesan (KR) dalam medium.

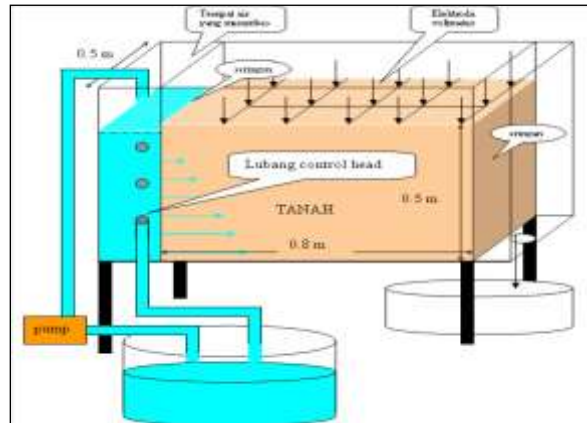
Untuk mengetahui nilai kecepatan perembesan air dalam tanah maka persamaan (7) diturunkan terhadap titik dalam batasan (titik a). Turunan persamaan (7) terhadap titik a adalah:

$$\frac{\partial H}{\partial a} = \sum_{m=1}^N H_m \int_{C_m} \frac{\partial^2 G}{\partial a \partial n} ds - \frac{\partial H}{\partial n} \Big|_m \int_{C_m} \frac{\partial G}{\partial a} ds \quad (9)$$

Pemodelan secara matematik distribusi SP menggunakan pendekatan MEB adalah menyelesaikan persamaan (8). Hasil perhitungan persamaan (8) dimasukkan ke persamaan hukum Darcy (5) sehingga dapat diketahui distribusi KR dan distribusi SP dari perembesan air dalam medium pori.

3. Model Geometri Tinjauan

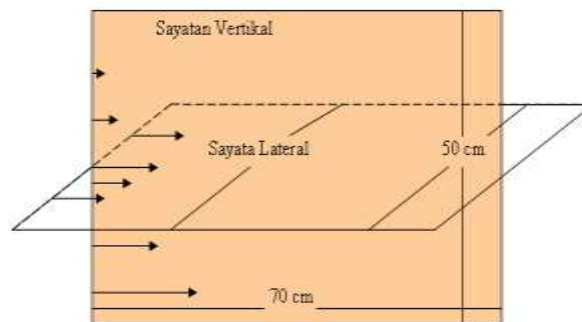
Bentuk dan ukuran medium berpori yang menjadi tinjauan dalam pemodelan distribusi potensial elektrokinetik dapat dilihat dalam sketsa alat pemodelan fisik pada Gambar 1. Sebagai gambaran, di bagian kiri sebagai sumber air yang dirembeskan masuk ke dalam medium (*input*) dan keluar di sebelah kanan (*output*). Cara pemodelan yang dilakukan adalah dua dimensi (2D) yaitu sayatan vertikal dan sayatan lateral yang diambil ditengah-tengah dari tinjauan fisik.



Gambar 1. Sketsa Alat Pemodelan Fisik untuk Pemodelan PE dalam Medium.

Sayatan vertikal dan sayatan lateral yang menjadi fokus dalam pemodelan distribusi potensial elektrokinetik dapat dilihat dalam Gambar 2. Ukuran penampang tersebut adalah panjang 70 cm, tinggi 50 cm dan lebar 50 cm. Demikian pula, sumber air yang merembes mempunyai kedalaman 50 cm sehingga nilai hidrolis head bervariasi dari 0 sampai 50 cm.

Syarat batas yang digunakan adalah syarat batas campuran antara syarat batas Dirichlet dan syarat batas Neumann. Penampang sayatan lateral mempunyai syarat batas Dirichlet yaitu nilai hidrolis head $H = 25$ dari sumber karena sayatan dilakukan ditengah garis sayatan vertikal dan batas lain diberi nilai nol. Syarat batas penampang sayatan vertikal dari sumber air, diskritisasi hidrolis head dari dasar ke atas permukaan adalah 45 cm, 35 cm, 25 cm, 15 cm dan 5cm. Sedangkan *boundary* lain diberi syarat batas campuran sama dengan nol.



Gambar 2. Model Sayatan Vertikal dan Lateral.

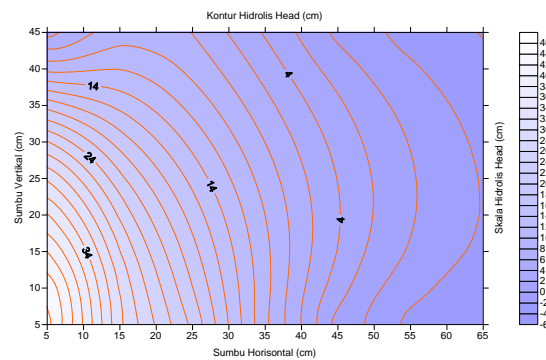
Untuk mempermudah soal yang diteliti ini, tanah yang digunakan dianggap seragam sehingga nilai K dan C pada jurusan vertikal sama dengan nilai K dan C pada jurusan horisontal. Nilai K yang digunakan 0,1681 cm/s, sedangkan nilai C adalah 0,0596 mV.cm [9].

Air yang merembes masuk ke dalam tanah yang masuk pada titik tertentu akan menempuh suatu jalan tertentu. Jalan ini disebut garis aliran (*flow line* atau *stream line*). Garis-garis *pressure head* disebut garis “*equipotensial*” atau *equipotensial lines*. Garis *equipotensial* tegak lurus terhadap garis aliran.

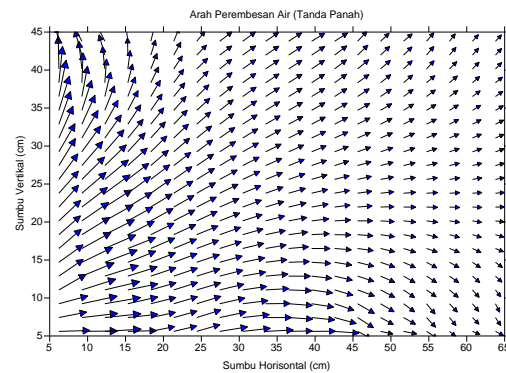
4. Hasil dan Pembahasan

4.1. Sayatan Vertikal

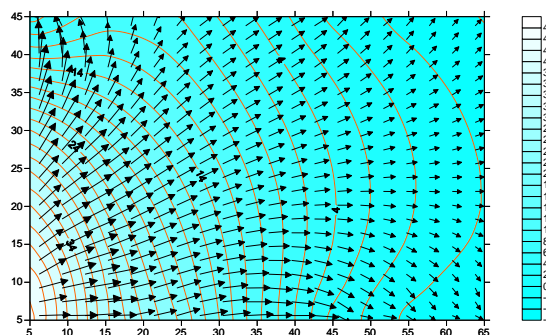
Hasil pemodelan secara matematik penampang sayatan vertikal terdiri dari lima gambar. Kontur pertama yang terlihat pada Gambar 3 adalah kontur ketinggian *hidrolis head* atau garis equipotensial. Berdasarkan kontur garis equipotensial nampak jelas bahwa tekanan air akan semakin mengecil jika semakin jauh dari sumber dan semakin ke bawah semakin besar. Kedua, Gambar 4 yang menyatakan arah aliran rembesan air dalam medium berpori. Selanjutnya, Gambar 5 adalah gabungan (*overlay*) dari Gambar 3 dengan Gambar 4. Hasil *overlay* tersebut menunjukkan bahwa garis equipotensial saling berpotongan tegak lurus garis aliran (*flow line*).



Gambar 3. Model Distribusi Garis ketinggian *Hidrolis Head* (*Equipotential*) Sayatan Vertikal.

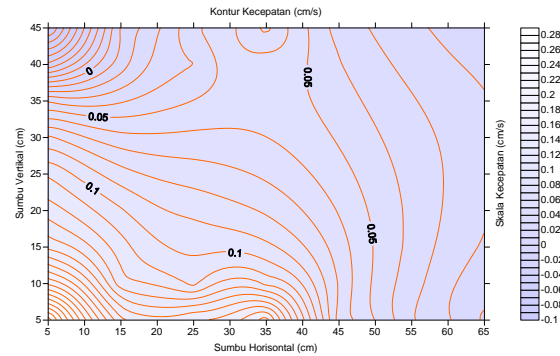


Gambar 4. Model Distribusi Garis Aliran Perembesan Air.



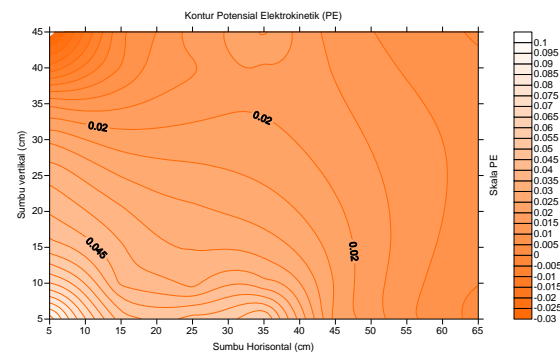
Gambar 5. Garis Aliran Perembesan Air Tegak Lurus Garis Equipotensial (*Flow Net*).

Gambar 6 dan Gambar 7 masing-masing adalah kontur distribusi kecepatan perembesan dan kontur distribusi potensial elektrokinetik. Kedua kontur distribusi kecepatan rembesan dan distribusi potensial elektrokinetik mempunyai karakter yang sama dan ini menunjukkan bahwa hubungan antara kecepatan perembesan dengan potensial elektrokinetik adalah linier.



Gambar 6. Distribusi Kecepatan Perembesan Air dalam Medium Pori Sayatan Vertikal.

Distribusi potensial elektrokinetik Gambar 7 dapat diketahui bahwa distribusi potensial elektrokinetik pada arah vertikal semakin ke bawah nilainya semakin besar. Demikian pula dengan distribusi potensial elektrokinetik yang semakin kecil jika semakin jauh dari sumber.

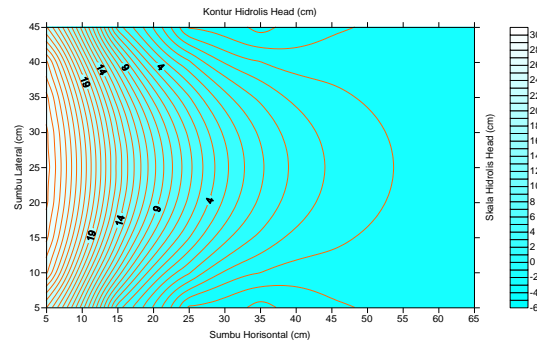


Gambar 7. Model Distribusi Potensial Elektrikinetik (PE) dalam Medium Pori Sayatan Vertikal.

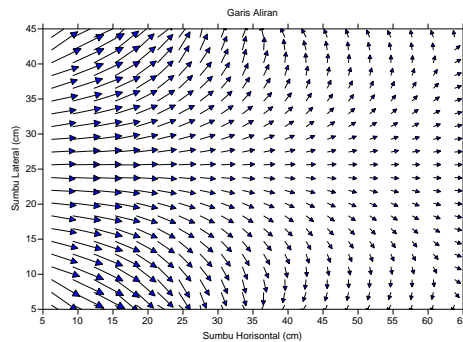
4.2 Sayatan Lateral

Seperti yang telah dijelaskan pada penampang sayatan vertikal, hal yang sama dilakukan pada penampang sayatan lateral. Hasil pemodelan penampang sayatan lateral dapat dilihat pada Gambar 8 sampai Gambar 12. Gambar 8, Gambar 9, dan Gambar 11 adalah kontur garis equipotensial dan garis aliran. Sedangkan Gambar 11 dan Gambar 12 adalah kontur distribusi kecepatan perembesan dan kontur distribusi potensial elektrokinetik.

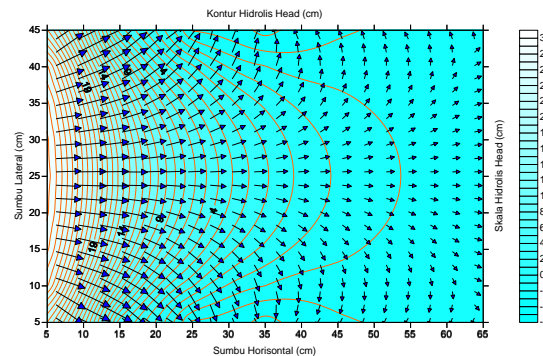
Berdasarkan hasil pemodelan yang dilakukan pada Gambar 8,9,10 nampak terlihat bahwa distribusi kontur distribusi hidrolis head yang dikenal dengan *pressure head (equipotential line)* adalah simetri secara lateral dengan nilai paling besar terletak di tengah-tengah penampang.



Gambar 8. Model Distribusi Hidrolis Head (*Equipotential*) Sayatan Lateral.



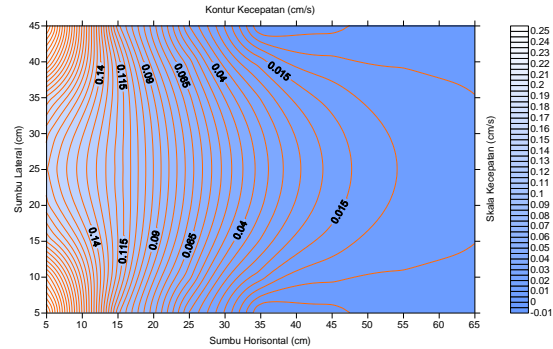
Gambar 9. Distribusi Garis Aliran (*Flow Line*) pada Arah Lateral.



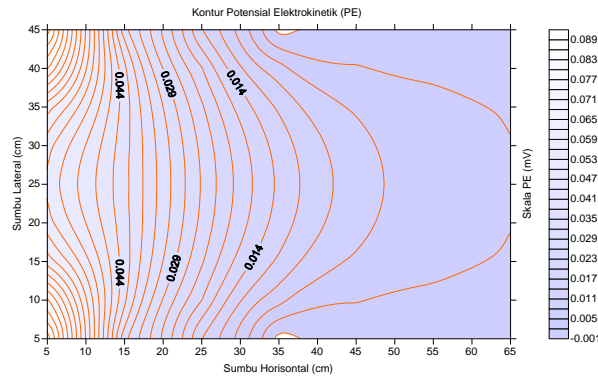
Gambar 10. Garis Aliran Tegak Lurus Garis Equipotensial (*Flow Net*) pada Arah Lateral.

Hasil pemodelan kontur distribusi kecepatan perembesan dan kontur distribusi potensial elektrokinetik pada Gambar 11 dan Gambar 12 juga memperlihatkan karakteristik yang sama karena hubungan antara kecepatan perembesan dan potensial elektrokinetik adalah linier (persamaan 5).

Distribusi potensial elektrokinetik Gambar 12 dapat diketahui bahwa distribusi potensial elektrokinetik mempunyai nilai yang simetri pada arah lateral dan nilai paling besar terletak ditengah penampang. Selanjutnya, distribusi potensial elektrokinetik semakin kecil nilainya jika semakin jauh dari sumber.



Gambar 11. Distribusi Kecepatan Perembesan Sayatan Lateral.



Gambar 12. Distribusi PE pada Arah Lateral.

Berdasarkan hasil pemodelan baik pada penampang sayatan vertikal maupun penampang sayatan lateral menunjukkan bahwa pemodelan distribusi potensial elektrokinetik dalam medium pori dapat diselesaikan dengan metoda elemen batas.

5. Penutup

Metoda elemen batas (MEB) cukup baik digunakan dalam pemodelan distribusi potensial elektrokinetik (PE), garis equipotensial, garis aliran, dalam medium pori karena adanya perembesan air. Kelebihan dari MEB bukan hanya karena mudah dan cepat mendapatkan solusi secara numerik dengan perubahan syarat batas baik syarat batas Dirichlet, Newmann maupun syarat batas campuran sesuai dengan kondisi batasan yang ditinjau tetapi juga sangat cepat dalam proses perhitungan dalam komputer.

Metode elemen batas (MEB) dapat digunakan untuk memodelkan distribusi potensial elektrokinetik secara vertikal maupun lateral. Namun demikian, pemodelan distribusi potensial elektrokinetik secara lateral lebih mudah diselesaikan dari pada distribusi potensial elektrokinetik secara vertikal. Mengapa demikian, karena sayatan lateral dapat diambil syarat batas pada sumber hanya satu macam nilai hidrolis head sedangkan pada sayatan vertikal nilai hidrolis head sangat variatif, artinya setiap titik sumber pada arah vertikal mempunyai nilai hidrolis head yang berbeda.

Daftar Pustaka

- [1] Clements D. L., and Kusuma J., 1991. *On The Boundary Element Method for Darcy, S Flow With Variable Permeability*. CTAC.
- [2] Kim G., Heinson and Joseph J., 2004. Electrokinetic groundwater exploration: a new geophysical technique. School of Earth and Environment Sciences, University of Adelaide, SA, 5005. *Regolith 2004*. CRC LEME, pp. 181-185.
- [3] Kreyzig E., 1980. *Advanced Engineering Mathematics*. John Wiley & Sons, pp. 667-668.
- [4] Overbeek J.T.G., 1952. Electrochemistry of the double layer. *Colloid Science* **1**, 115-193.
- [5] Moore, 2004. *Detecting Seepage Through a Natural Moraine Dam Using the Self-Potential Method* (agu).
- [6] Nurhandoko B.E.B., and Ahmad I.A., 2001. Self-potential study for identifying fluid flow characteristics: physical model case. *Proceedings The 26th HAGI Annual Meeting*, October 1-3, 2001. Bidakara Complex, Jakarta.
- [7] Syahrudin M.H., 1994. Penentuan Tekanan Rembesan Air Bawah Tanah dengan Metode Elemen Batas. *Skripsi*. UNHAS Makassar.
- [8] Syahrudin M.H., 2007. Self-Potential study for Laboratory Measurements of Electrokinetic Potential from Fluid Flow in Porous Media. *Proceedings Joint Convention Bali*, The 32nd HAGI and The 36nd IAGI Annual Convention and Exhibition.
- [9] Semyonov A.S., 1980. *Electric Prospecting by the Self-Potential Method*. Nedra.